

Zadania maturalne
Obliczenia w układzie współrzędnych

✓ **Zad. 1** (5 pkt) (czerwiec 2022 - zad. 35)

Punkt $A = (1, -3)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkt $S = (5, -1)$ jest środkiem odcinka AB . Wierzchołek C tego trójkąta leży na prostej o równaniu $y = x + 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

✓ **Zad. 2** (5 pkt) (czerwiec 2021 - zad. 35)

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC jest zawarta w prostej o równaniu $y = -2x + 16$. Wierzchołki B i C mają współrzędne $B = (3, 10)$ i $C = (-2, 3)$. Oblicz współrzędne wierzchołka A i pole trójkąta ABC .

→ **Zad. 3** (4 pkt) (maj 2021 - zad. 35)

Punkty $A = (-20, 12)$ i $B = (7, 3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Wierzchołek C leży na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz współrzędne wierzchołka C oraz obwód tego trójkąta.

✓ **Zad. 4** (4 pkt) (sierpień 2020 - zad. 34)

Prosta o równaniu $y = -2x + 7$ jest symetralną odcinka PQ , gdzie $P = (4, 5)$. Oblicz współrzędne punktu Q .

✓ **Zad. 5** (4 pkt) (czerwiec 2020 - zad. 32)

Punkty $A = (1, -1)$, $B = (6, 1)$, $C = (7, 5)$ i $D = (2, 4)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta.

Zad. 6 (4 pkt) (maj 2020 - zad. 32)

Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A = \left(5, -\frac{5}{3}\right)$. Przekątna BD tego kwadratu jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{4}{3}x$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych AC i BD oraz pole kwadratu $ABCD$.

Zad. 7 (4 pkt) (sierpień 2019 - zad. 31)

Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = \left(-\frac{21}{2}, -1\right)$. Punkty A i C leżą na prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$. Wyznacz równanie prostej BD .

Zad. 8 (5 pkt) (maj 2019 - zad. 33)

Dany jest punkt $A = (-18, 10)$. Prosta o równaniu $y = 3x$ jest symetralną odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .

Zad. 9 (2 pkt) (sierpień 2018 - zad. 31)

Punkt $A = (2, 4)$, $B = (0, 0)$, $C = (4, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Punkt D jest środkiem boku AC tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej BD .

Zad. 10 (4 pkt) (czerwiec 2018 - zad. 34)

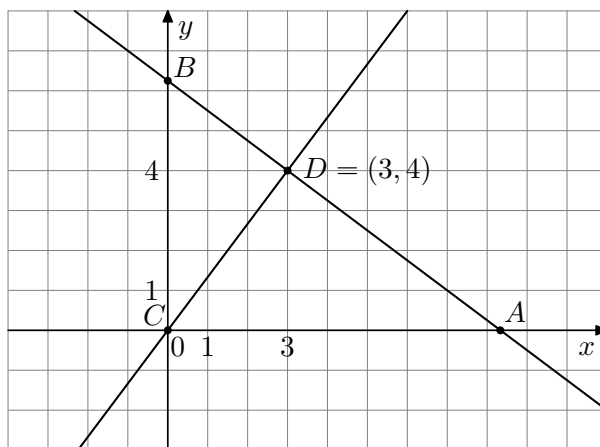
Punkty $A = (-1, 1)$ i $C = (1, 9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

Zad. 11 (5 pkt) (maj 2018 - zad. 32)

W układzie współrzędnych punkty $A = (4, 3)$ i $B = (10, 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C , dla którego kąt ABC jest prosty.

Zad. 12 (4 pkt) (sierpień 2017 - zad. 33)

Punkt $C = (0, 0)$ jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego ABC , którego wierzchołek A leży na osi Ox , a wierzchołek B na osi Oy układu współrzędnych. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C przecina przeciwprostokątną AB w punkcie $D = (3, 4)$.



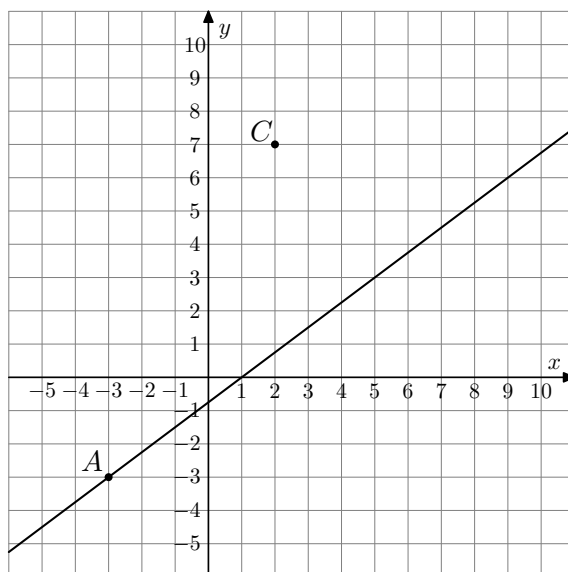
Oblicz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta oraz długość przeciwprostokątnej AB .

Zad. 13 (4 pkt) (czerwiec 2017 - zad. 33)

Punkty $A = (-2, -8)$ i $B = (14, -8)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AB| = |AC|$. Wysokość AD tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 7$. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.

Zad. 14 (4 pkt) (sierpień 2016 - zad. 32)

Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego ABC : $A = (-3, -3)$ i $C = (2, 7)$ oraz prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, zawierająca przeciwprostokątną AB tego trójkąta.



Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta i długość odcinka AB .

Zad. 15 (2 pkt) (czerwiec 2016 - zad. 27)

Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi Ox .

Zad. 16 (4 pkt) (sierpień 2015 - zad. 32)

Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 2)$, $B = (6, -2)$, $C = (10, 6)$.

Zad. 17 (2 pkt) (maj 2015 - zad. 30)

W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-43, -12)$, $B = (50, 19)$. Prosta AB przecina oś Ox w punkcie P . Oblicz pierwszą współrzędną punktu P .

Zad. 18 (4 pkt) (grudzień 2014 - zad. 32)

Punkty $A = (3, 3)$, $B = (9, 1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , a punkt $M = (1, 6)$ jest środkiem boku AC . Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostej AB z wysokością tego trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka C .

Zad. 19 (4 pkt) (czerwiec 2014 - zad. 34)

Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest bok AB , gdzie $A = (2, 1)$ i $B = (5, 2)$. Ramię tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x - y - 3 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

Zad. 20 (4 pkt) (sierpień 2013 - zad. 33)

Punkty $A = (-1, -5)$, $B = (3, -1)$, $C = (2, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

Zad. 21 (5 pkt) (czerwiec 2013 - zad. 34)

Wierzchołki trapezu $ABCD$ mają współrzędne: $A = (-1, -5)$, $B = (5, 1)$, $C = (1, 3)$, $D = (-2, 0)$. Napisz równanie okręgu, który jest styczny do podstawy AB tego trapezu, a jego środek jest punktem przecięcia się prostych zawierających ramiona AD oraz BC trapezu $ABCD$.

Zad. 22 (4 pkt) (marzec 2013 - zad. 31)

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (2, 1)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

Zad. 23 (4 pkt) (czerwiec 2011 - zad. 33)

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punktu $A = (1, 8)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

Zad. 24 (4 pkt) (maj 2011 - zad. 31)

Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Zad. 25 (4 pkt) (listopad 2010 - zad. 33)

Punkty $A = (1, 5)$, $B = (14, 31)$, $C = (4, 31)$ są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D . Oblicz długość odcinka BD .



Zad. 26 (2 pkt) (sierpień 2010 - zad. 30)

Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (3, 8)$, $B = (1, 2)$, $C = (6, 7)$ jest prostokątny.

Zad. 27 (2 pkt) (listopad 2009 - zad. 28)

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2, 5)$ i $C = (6, 7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD .

Zad. 28 (4 pkt) (listopad 2009 - zad. 33)

Punkty $A = (2, 0)$ i $B = (12, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB . Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = x$. Oblicz współrzędne punktu C .



Zad. 29 (2 pkt) (informator CKE)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg O określony równaniem:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Oblicz współrzędne x punktów przecięcia okręgu O z osią Ox .

Informacje do zadań 30 i 31.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są okrąg O o środku w punkcie $S = (3, -4)$ i prosta k o równaniu $2x - y - 11 = 0$. Okrąg O jest styczny do prostej k w punkcie P .

Zad. 30 (2 pkt) (informator CKE)

Wyznacz i zapisz równanie okręgu O .

Zad. 31 (2 pkt) (informator CKE)

Oblicz współrzędne punktu P , w którym okrąg O jest styczny do prostej k .

Zad. 32 (2 pkt) (informator CKE)

Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC , gdzie $A = (1, 3)$, $B = (4, 7)$, $C = (-2, -3)$.

Zad. 33 (2 pkt) (informator CKE)

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczono punkty $A = (2, 0)$ i $B = (4, 0)$. Wyznacz wszystkie możliwe położenia punktu C , dla których ABC jest trójkątem równoramiennym o podstawie AB i polu równym 3.

Zad. 34 (2 pkt) (informator CKE)

Punkty $A = (-3, -5)$, $B = (4, -1)$, $C = (-2, 3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

✓ **Zad. 35** (2 pkt) (informator CKE)

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC , którego wierzchołkami są punkty $A = (-2, -1)$, $B = (6, 1)$, $C = (7, 10)$.

Zad. 36 (2 pkt) (zbiór zadań CKE - zad. 46.1)

Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Zad. 37 (3 pkt) (zbiór zadań CKE - zad. 46.2)

Wierzchołki trójkąta ABC są trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Odcinek AC jest przekątną tego równoległoboku. Oblicz współrzędne wierzchołka D .

Zad. 38 (1 pkt) (zbiór zadań CKE - zad. 46.3)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wyznaczonych miejscach, aby zdanie było prawdziwe.

Punkt S przecięcia środkowych trójkąta ABC ma współrzędne: $S = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$.

Zad. 39 (1 pkt) (zbiór zadań CKE - zad. 47)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg O o równaniu $x^2 + y^2 = 2$ oraz prosta k o równaniu $y = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wyznaczonych miejscach, aby zdanie było prawdziwe.

Okrąg O i prosta k mają dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy $m \in \dots\dots\dots$.

Zad. 40 (4 pkt) (zbiór zadań CKE - zad. 48)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest trójkąt ABC . Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 6$. Wierzchołki A i B leżą – odpowiednio – na osi Oy oraz Ox . Wierzchołek C ma współrzędne $(3, 7)$. Oblicz pole trójkąta ABC .

Zad. 41 (4 pkt) (zbiór zadań CKE - zad. 49)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-8, 12)$ i $B = (-2, 4)$ są końcami cięciwy okręgu O . Środek tego okręgu leży na prostej k o równaniu $y = 4x + 2$. Wyznacz współrzędne środka okręgu O i promień tego okręgu.

Zad. 42 (3 pkt) (zbiór zadań CKE - zad. 50)

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Funkcja liniowa g określona jest wzorem $g(x) = -x + 5$. Oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz funkcji $y = g(x)$.

Odpowiedzi

Zad. 1

$$B = (9, 1); C = (-\frac{1}{3}, 9\frac{2}{3})$$

Zad. 2

$$A = (6, 6; 2, 8), P_{ABC} = 30,6$$

Zad. 3

$$C = (0, 27), Obw = 50 + 9\sqrt{10}$$

Zad. 4

$$Q = (-\frac{4}{5}, \frac{13}{5})$$

Zad. 5

$$(4\frac{2}{7}, 2\frac{2}{7})$$

Zad. 6

$$S = (1, \frac{4}{3}), P = 50.$$

Zad. 7

$$y = -3x - 32\frac{1}{2}$$

Zad. 8

$$\text{Odp. } B = (20\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5})$$

Zad. 9

$$y = \frac{1}{3}x$$

Zad. 10

$$B = (8, 6; 5, 8)$$

Zad. 11

$$C = (6, 4; 15, 8)$$

Zad. 12

$$A = (8\frac{1}{3}, 0), B = (0, 6\frac{1}{4}),$$

Zad. 13

$$C = (7, 6; 4, 8)$$

Zad. 14

$$|AB| = 12\frac{1}{2}$$

$$|AB| = 10\frac{5}{12}$$

Zad. 15

$$P = 2\frac{2}{3}$$

Zad. 16

$$y = -3x + 16$$

Zad. 17

$$-7$$

Zad. 18

$$(-2, 4; 4, 8)$$

Zad. 19

$$C = (3, 3)$$

Zad. 20

$$P = 24$$

Zad. 21

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 72$$

Zad. 22

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Zad. 23

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

Zad. 24

$$(4\frac{3}{5}, 6\frac{1}{5})$$

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$(x - 13)^2 + (y - 13)^2 = 169$$

Zad. 25

$$2\sqrt{5}$$

Zad. 26

$$-$$

Zad. 27

$$y = -2x + 14$$

Zad. 28

$$(3, 3) \text{ lub } (4, 4).$$

Zad. 29

$$2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}$$

Zad. 30

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = \frac{1}{5}$$

Zad. 31

$$P = (3\frac{2}{5}, -4\frac{1}{5})$$

Zad. 32

$$1$$

Zad. 33

$$C_1 = (3, 3), C_2 = (3, -3)$$

Zad. 34

$$\sqrt{65}$$

Zad. 35

$$y = 2x - 4$$

Zad. 36

$$-$$

Zad. 37

$$D = (-28, -17)$$

Zad. 38

$$S = (-13\frac{1}{3}, -3)$$

Zad. 39

$$m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Zad. 40

$$10$$

Zad. 41

$$S = (3, 14)$$

Zad. 42

$$(1, 4); (2, 3)$$

$$r = 5\sqrt{5}$$