

Zadania maturalne
Praktyczne zastosowanie funkcji kwadratowej

Zad. 1 (4 pkt) (sierpień 2023 - zad. 33)

Zakład stolarski produkuje krzesła, które sprzedaje po 196 złotych za sztukę. Właściciel, na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków, stwierdził, że:

- przychód P (w złotych) ze sprzedaży x krzesel można opisać funkcją $P(x) = 196x$
- koszt K (w złotych) produkcji x krzesel dziennie można opisać funkcją

$$K(x) = 4x^2 + 4x + 240$$

Dziennie w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 30 krzesel.

Oblicz, ile krzesel powinien dziennie sprzedawać zakład, aby zysk ze sprzedaży krzesel wyprodukowanych przez ten zakład w ciągu jednego dnia był możliwie największy. Oblicz ten największy zysk.

Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.

Zad. 2 (1 pkt) (maj 2023 - zad. 30.2)

Właściciel pewnej apteki przeanalizował dane dotyczące liczby obsługiwanych klientów z 30 kolejnych dni. Przyjmijmy, że liczbę L obsługiwanych klientów n -tego dnia opisuje funkcja

$$L(n) = -n^2 + 22n + 279$$

gdzie n jest liczbą naturalną spełniającą warunki $n \geq 1$ i $n \leq 30$.

Którego dnia analizowanego okresu w aptecę obsłużono największą liczbę klientów? Oblicz liczbę klientów obsłużonych tego dnia.

Zad. 3 (4 pkt) (wrzesień 2022 - zad. 23)

Rodzinna firma stolarska produkuje małe wiatraki ogrodowe. Na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków stwierdzono, że:

- przychód P (w złotych) z tygodniowej sprzedaży x wiatraków można opisać funkcją $P(x) = 251x$
- koszt K (w złotych) produkcji x wiatraków w ciągu jednego tygodnia można określić funkcją $K(x) = x^2 + 21x + 170$.

Tygodniowo w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 150 wiatraków.

Oblicz, ile tygodniowo wiatraków należy sprzedawać, aby zysk zakładu w ciągu jednego tygodnia był największy. Oblicz ten największy zysk.

Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.

Zad. 4 (4 pkt) (czerwiec 2019 - zad. 33)

Liczby rzeczywiste x i z spełniają warunek $2x + z = 1$. Wyznacz takie wartości x i z , dla których wyrażenie $x^2 + y^2 + 7xz$ przyjmuje największą wartość. Podaj tę największą wartość.

Zad. 5 (5 pkt) (sierpień 2014 - zad. 32)

Miasta A i B są odległe o 450 km. Pani Danuta pokonała tę trasę swym samochodem w czasie o 75 minut dłuższym niż pani Lidia. Wartość średniej prędkości, z jaką jechała pani Danuta na całej trasie, była o 18 km/h mniejsza od wartości średniej prędkości, z jaką jechała pani Lidia. Oblicz średnie wartości:

- prędkości, z jaką pani Danuta jechała z A do B .
- prędkości, z jaką pani Lidia jechała z A do B .

Zad. 6 (5 pkt) (czerwiec 2014 - zad. 33)

Trasę etapu wyścigu kolarskiego o długości 150 km pan Nowak pokonał w czasie o 1 godzinę i 50 minut krótszym niż jego kolega z drużyny, pan Kowalski. Średnia wartość prędkości, z jaką pan Nowak jechał na tym etapie, była o 11 km/h większa od średniej wartości prędkości pana Kowalskiego na tej trasie. Oblicz średnie wartości prędkości, z jakimi przejechali całą trasę obaj zawodnicy.

Zad. 7 (5 pkt) (maj 2014 - zad. 33)

Turysta zwiedzał zamek stojący na wzgórzu. Droga łącząca parking z zamkiem ma długość 2,1 km. Łączny czas wędrowki turysty z parkingu do zamku i z powrotem, nie licząc czasu poświęconego na zwiedzanie, był równy 1 godzinę i 4 minuty. Oblicz, z jaką średnią prędkością turysta wchodził na wzgórze, jeżeli prędkość ta była o $1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejsza od średniej prędkości, z jaką schodził ze wzgórza.

Zad. 8 (5 pkt) (czerwiec 2013 - zad. 33)

Grupa znajomych wykupiła wspólnie dostęp do Internetu na okres jednego roku. Opłata miesięczna wynosiła 120 złotych. Podzielono tę kwotę na równe części, by każdy ze znajomych płacił tyle samo. Po upływie miesiąca do grupy dołączyły jeszcze dwie osoby i wówczas opłata miesięczna przypadająca na każdego użytkownika zmniejszyła się o 5 złotych. Ile osób liczyła ta grupa w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu?

Zad. 9 (5 pkt) (maj 2013 - zad. 34)

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Zad. 10 (5 pkt) (marzec 2012 - zad. 32)

Z dwóch miast A i B , odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B . Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A .

Zad. 11 (5 pkt) (maj 2011 - zad. 32)

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrowkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Zad. 12 (5 pkt) (listopad 2009 - zad. 32)

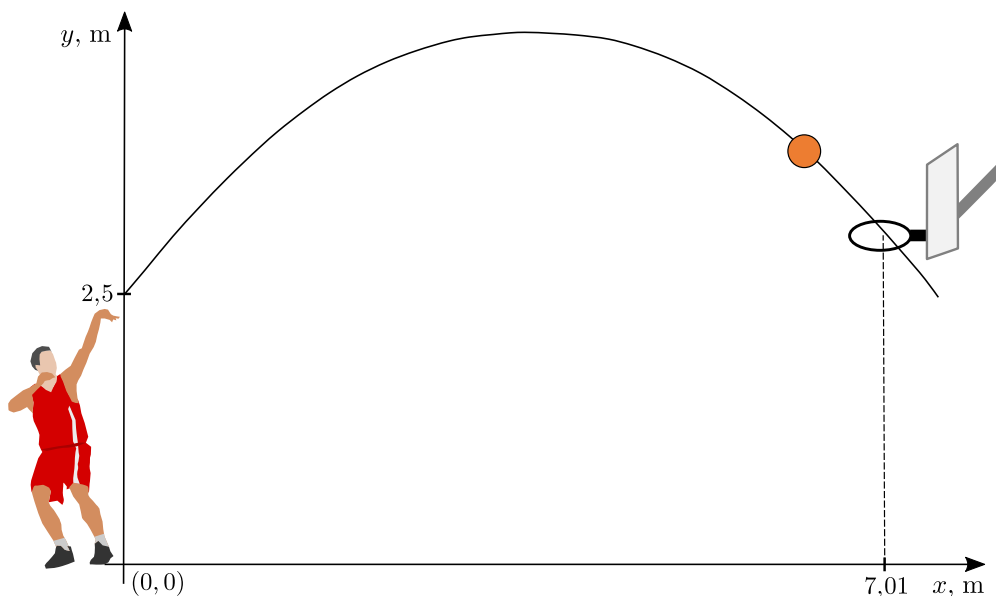
Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Informacje do zadań

Na podstawie zasad dynamiki można udowodnić, że torem rzutu – przy pominięciu oporów powietrza – jest fragment paraboli. Koszykarz wykonał rzut do kosza z odległości $x_k = 7,01$ m, licząc od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej. Do opisu toru ruchu przyjmijmy układ współrzędnych, w którym środek piłki w chwili początkowej znajdował się w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2,50$ m. Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

$$y = -0,174x^2 + 1,3x + 2,5$$

Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek kołowej obręczy kosza. Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.



Zad. 13 (2 pkt) (informator CKE)

Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

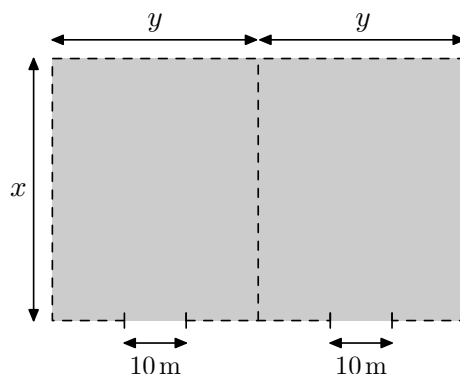
Zad. 14 (3 pkt) (informator CKE)

W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki jest równy 0,12 m.

Oblicz współrzędną x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zad. 15 (4 pkt) (informator CKE)

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Zad. 16 (3 pkt) (informator CKE)

Liczbę 42 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, by różnica ich kwadratów była równa 168.

Zad. 17 (6 pkt) (informator CKE)

Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzona przez obie rury jednocześnie.

Zad. 18 (4 pkt) (zbiór zadań CKE - zad. 17)

Szymon przygotowuje się do egzaminu na prawo jazdy. Opanował już 97 spośród 3697 zadań. Postanowił, że każdego kolejnego dnia będzie rozwiązywał n zadań. Zauważył, że gdyby dzienną liczbę rozwiązanych zadań zwiększył o 5, czas potrzebny na rozwiązanie wszystkich zadań skróciłby się o 10 dni. Oblicz, ile dni zajmie Szymonowi przygotowanie do egzaminu, jeśli nie będzie zwiększał dziennej liczby rozwiązanych zadań.

Odpowiedzi

Zad. 1

24 krzesła
2064 zł zysku

Zad. 2

11 dnia, 400 klientów

Zad. 3

Największy zysk równy 13055 zł będzie
dla 115 sprzedanych tygodniowo wiatraków.

Zad. 4

$x = \frac{1}{6}$, $z = \frac{2}{3}$, $y_{\max} = \frac{5}{4}$

Zad. 5

Pani Danuta: 72 km/h
Pani Lidia: 90 km/h

Zad. 6

Nowak: 36 km/h
Kowalski: 25 km/h

Zad. 7

$v = 3,5$ km/h

Zad. 8

6 osób

Zad. 9

$v_1 = 72$ km/h
 $v_2 = 63$ km/h.

Zad. 10

Z miasta A : $v = 4$ km/h
Z miasta B : $v = 3$ km/h

Zad. 11

28 km

Zad. 12

15 dni

Zad. 13

$h = 4,93$ m

Zad. 14

$x = 8,99$ m

Zad. 15

$x = 100$ m, $y = 75$ m

Zad. 16

$42 = 23 + 19$

Zad. 17

$23\frac{1}{3}$ godz.

Zad. 18

90