

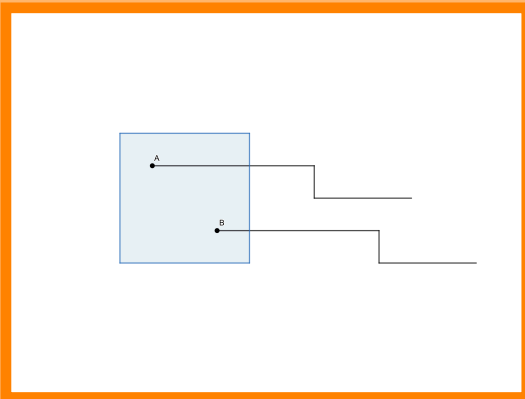
Bryła sztywna.

1. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej.

Punkt materialny - punkt o masie ciała, które opisujemy, objętość tego ciała zaniedbujemy.

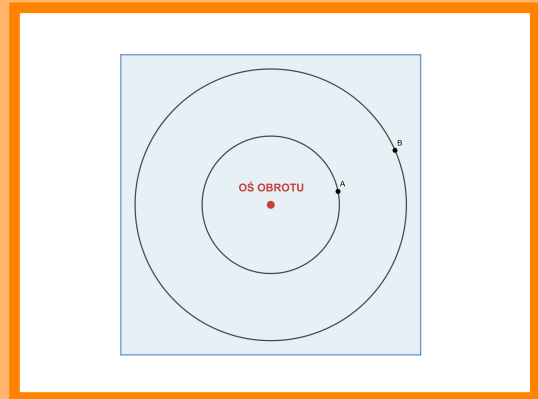
Bryła sztywna - zbiór punktów materialnych, które nie zmieniają odległości względem siebie.

Ruch postępowy.



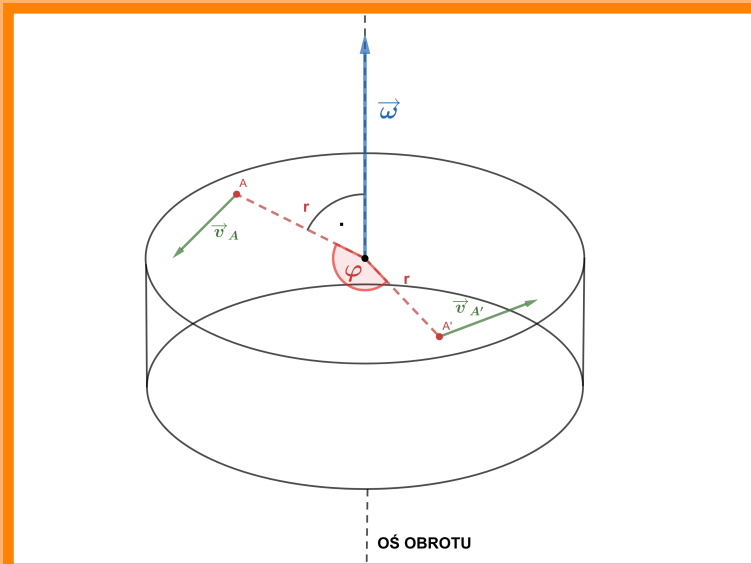
Tory: identyczne (ten sam kształt).

Ruch obrotowy.



Tory: okręgi o wspólnym środku.

Rysunek bryły sztywnej.



- Szybkość kątowna (wartość prędkości kątowej).

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$\omega = 2\pi f$$

- Przyspieszenie kątowe.

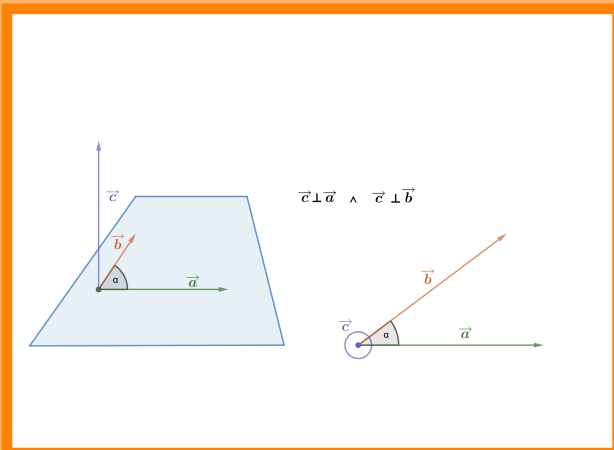
$$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Środek masy - punkt poruszający się tak, jak poruszałby się punkt materialny skupiający całą masę bryły.

2. Moment siły.

Iloczyn wektorowy.

Uwaga! Pamiętaj, że ważna jest kolejność wektorów



Wektor $\vec{b} \wedge \vec{a}$ leżą na tej samej płaszczyźnie.

Reguła prawej dłoni - za pomocą prawej dłoni nałóż wektor 1 ($\vec{a}$) na wektor 2 ($\vec{b}$) przez mniejszy kąt. Kciuk określa zwrot wektora 3 ($\vec{c}$)

symbol iloczynu wektorowego

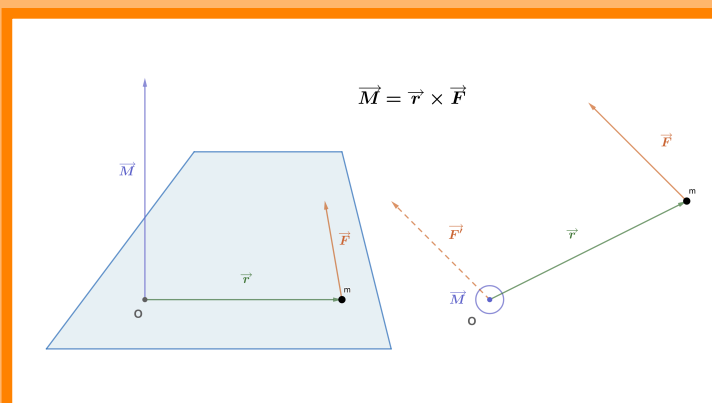
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

3 1 2

Uwaga!

$|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin \alpha$ lub
 $|\vec{c}| = c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$,
 α - mniejszy kąt pomiędzy $\vec{b} \wedge \vec{a}$
 $(\angle(\vec{a}; \vec{b}))$.

Moment siły ($\vec{M}$) względem punktu O .



$\vec{M} \perp \vec{r} \wedge \vec{M} \perp \vec{F}$, gdzie:
 $\vec{r}$ - wektor położenia [m],
 $\vec{F}$ - siła [N],
 $\vec{M}$ - moment siły [$N \cdot m$].

Uwaga!

$|\vec{M}| = M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$ lub
 $|\vec{M}| = M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$,
 α - mniejszy kąt pomiędzy $\vec{r} \wedge \vec{F}$
 $(\angle(\vec{r}; \vec{F}))$.

Pierwsza zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej.

Wstęp: bryła sztywna może się obracać wokół ustalonej osi.

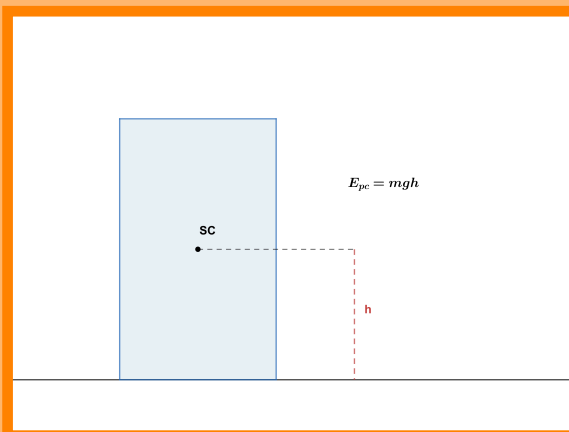
Treść zasady: Jeżeli na bryłę sztywną działają siły, których wypadkowy moment siły jest równy 0, to bryła sztywna jest w spoczynku lub obraca się ze stałą prędkością kątową.

Warunek równowagi bryły sztywnej - bryła sztywna pozostaje w spoczynku jeżeli działające siły i ich momenty się równoważą.

3. Środek ciężkości i energia potencjalna bryły sztywnej.

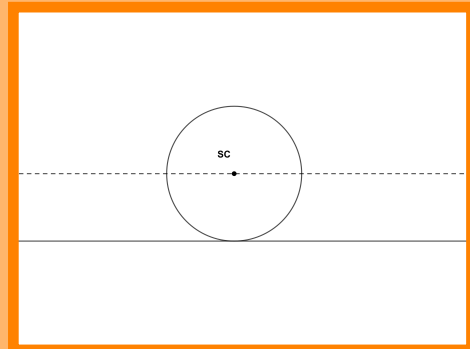
Środek ciężkości bryły sztywnej - punkt przyłożenia siły ciężkości do bryły sztywnej.
Uwaga! Środek masy i środek ciężkości to nie są te same punkty.

Energia potencjalna ciężkości (lub grawitacji) bryły sztywnej.

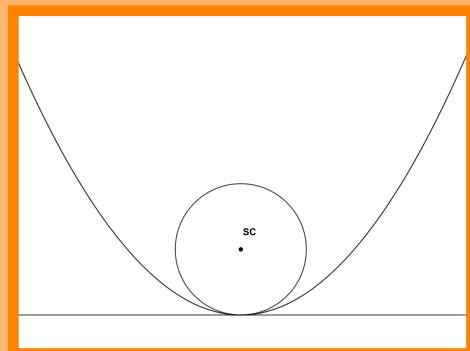


Stan równowagi bryły sztywnej:

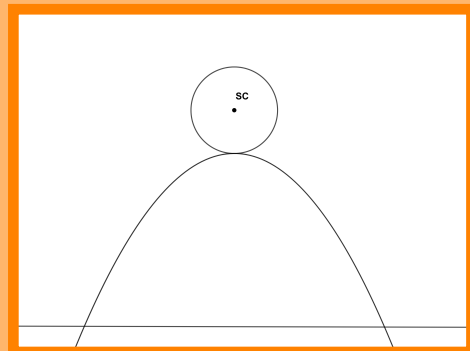
- równowaga obojętna - środek ciężkości zawsze na tym samym poziomie,



- równowaga stabilna - środek ciężkości jest najniżej,



- równowaga niestabilna - środek ciężkości jest najwyżej.



4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym.

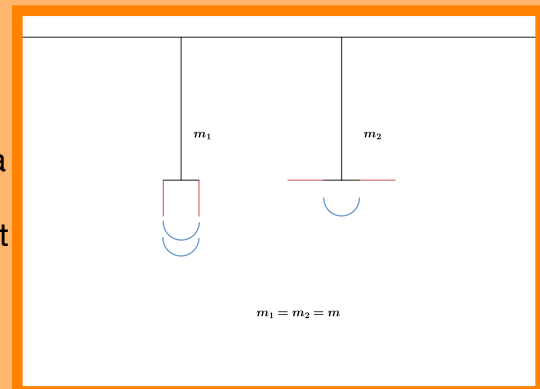
Bezwładność ciała (lub bryły sztywnej) w ruchu postępowym - cecha (własność) ciała, która polega na tym, że ciało poruszające się cały czas chce się poruszać, a spoczywające chce pozostać w spoczynku. Masa ciała jest miarą bezwładności.

Doświadczenie.

Uwaga!

Masy tych ciał są jednakowe, a mimo to obracają się w innym tempie.

Wniosek: w ruchu obrotowym ważna jest masa ciała i położenie masy względem osi obrotu. Wielkością opisującą rozkład masy jest moment bezwładności ciała (I). Moment bezwładności jest miarą bezwładności w ruchu obrotowym.

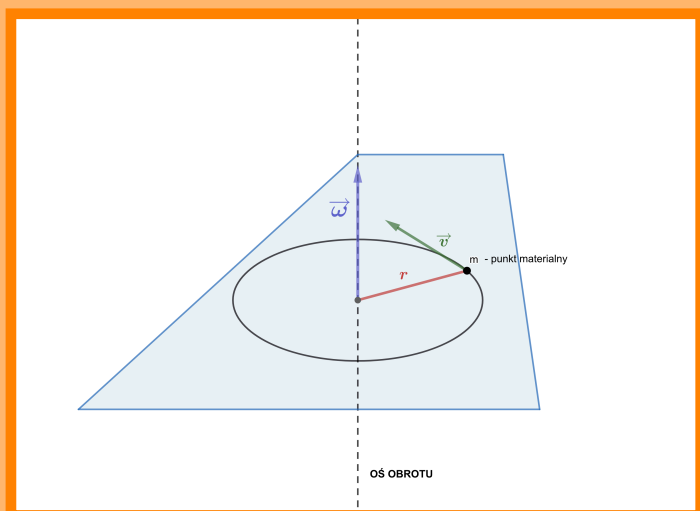


Punkt materialny.

$\vec{v}$ - prędkość liniowa punktu materialnego ($\vec{v}$ - leży na płaszczyźnie, po której porusza się punkt materialny),

$\vec{\omega}$ - prędkość kątowna punktu materialnego ($\vec{\omega}$ - prostopadła do płaszczyzny, po której porusza się punkt materialny),

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega \cdot r$$



$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega \cdot r)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

Bryła sztywna.

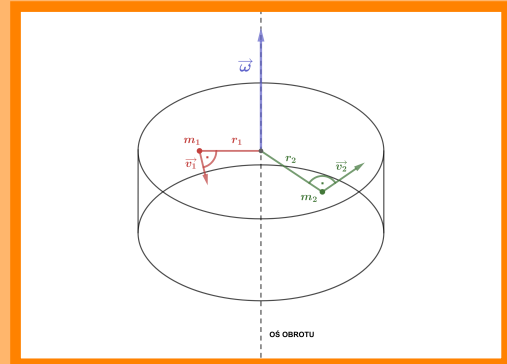
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2 \cdot \omega_1^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot r_n^2 \cdot \omega_n^2,$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_n, \quad \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 \cdot r_1^2 + \dots + m_n \cdot r_n^2) \cdot \omega^2,$$

$I = m_1 \cdot r_1^2 + \dots + m_n \cdot r_n^2$ - moment bezwładności bryły sztywnej (zależy od osi obrotu),

$$E_k = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2.$$



Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu złożonym (postępowy i obrotowy).

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \text{ gdzie:}$$

m - masa bryły sztywnej $[kg]$,

v - wartość prędkości liniowej środka masy bryły sztywnej $[\frac{m}{s}]$,

I - moment bezwładności bryły sztywnej względem osi przechodzącej przez środek masy,

ω - wartość prędkości kątowej (szybkość kątowa) $[\frac{rad}{s}]$.

Bryła sztywna (walec, kula) poruszająca się ruchem złożonym (postępowy i obrotowy).

W rzeczywistości na bryłę sztywną działa tarcie statyczne i toczne. Tarcie statyczne nie zmienia całkowitej energii mechanicznej bryły. Tarcie toczne powoduje straty całkowitej energii mechanicznej. W sytuacji idealnej pozostawiamy tarcie statyczne, a tarcie toczne zaniedbujemy.

5. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym.

Druga zasada dynamiki w ruchu postępowym: $\vec{F}_w = m \cdot \vec{a}$ lub $\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$.

Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym.

Wstęp: bryła sztywna może się obracać wokół ustalonej osi, na bryłę sztywną działają siły, które leżą na płaszczyźnie prostopadłej do tej osi.

Treść: jeżeli na bryłę sztywną działa wypadkowy moment siły ($\vec{M}_w$) równoległy do osi obrotu to bryła sztywna porusza się ruchem obrotowym z przyspieszeniem kątowym ($\vec{\varepsilon}$). Wartość tego przyspieszenia jest wprost proporcjonalna do wartości wypadkowego momentu siły, a jest odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności bryły względem osi obrotu.

$$\vec{M}_w = I \cdot \vec{\varepsilon}, \quad \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_w}{I}$$

6. Moment pędu.

Moment pędu ($\vec{L}$) punktu materialnego względem punktu O .

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}, \text{ gdzie:}$$

$\vec{r}$ - położenie $[m]$,

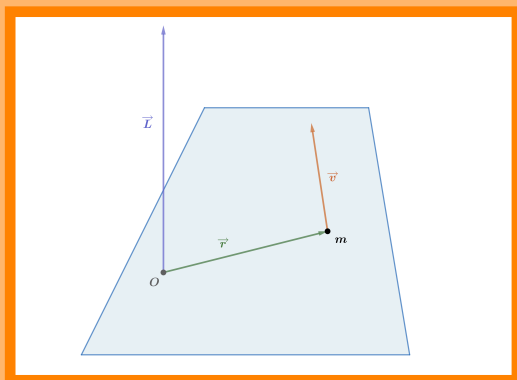
$\vec{p}$ - pęd punktu materialnego $[\frac{kg \cdot m}{s}]$,

m - masa punktu materialnego $[kg]$,

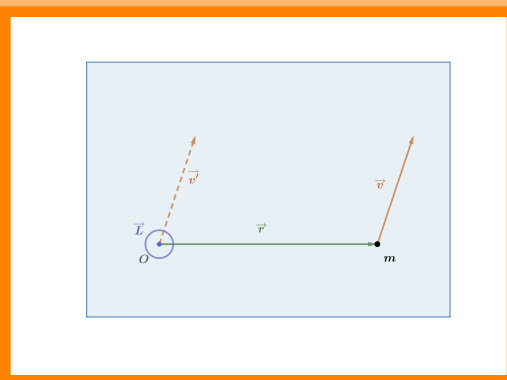
$\vec{v}$ - prędkość punktu materialnego $[\frac{m}{s}]$,

$\vec{L}$ - moment pędu punktu materialnego względem punktu O $[\frac{kg \cdot m^2}{s}]$.

Spojrzenie z boku.



Spojrzenie z góry.



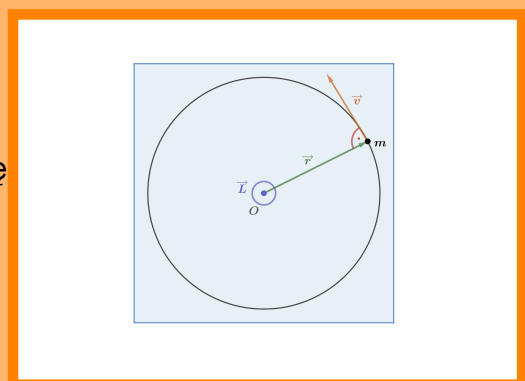
$$(\vec{L} \perp \vec{r}) \wedge (\vec{L} \perp \vec{v}) \wedge (\vec{L} \perp \vec{p})$$

- Wartość momentu pędu.

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha$$

- Moment punktu materialnego, poruszającego się po okręgu, względem osi obrotu.
Spojrzenie z góry.

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin(90^\circ) = r \cdot m \cdot v$$



Moment pędu bryły sztywnej (lub układu ciał) względem osi obrotu.

$$L = L_1 + \dots + L_n = m_1 r_1 v_1 + \dots + m_n r_n v_n$$

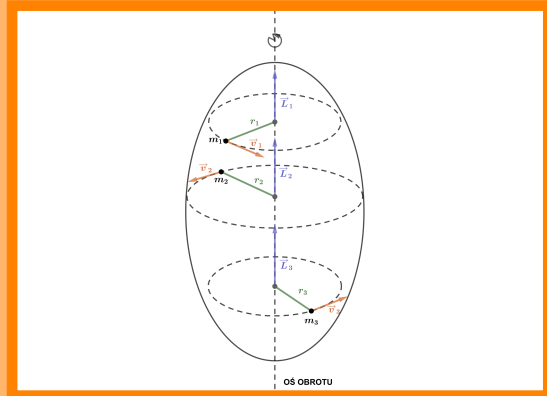
Uwaga!

$$v = \omega \cdot r \quad v_1 = \omega_1 \cdot r_1 \quad v_n = \omega_n \cdot r_n$$

$$L = m_1 r_1^2 \omega_1 + \dots + m_n r_n^2 \omega_n$$

$$\omega_1 = \omega_n = \omega \quad L = (m_1 r_1^2 + \dots + m_n r_n^2) \omega$$

$$L = I \omega$$



Zasada zachowania momentu pędu bryły sztywnej (lub układu ciał).

Jeżeli na bryłę sztywną nie działa moment siły zewnętrznej to całkowity moment pędu jest stały (zachowany). $\vec{L} = const, \Delta \vec{L} = 0$