

Ruch drgający.

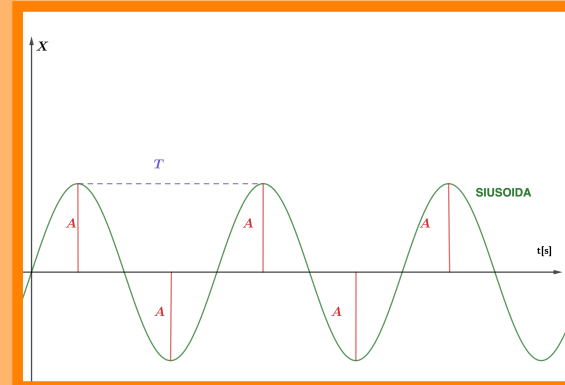
1. Badanie ruchu drgającego.

Ruch drgający - ruch, w którym położenie zmienia się okresowo (periodycznie).

Ruch harmoniczny - ruch drgający, w którym położenie zmienia sinusoidalnie w funkcji czasu, a siła powodująca ruch zwrócona jest przeciwnie do wychylenia.

Uwaga!

Jeżeli amplituda jest stała, to ruch harmoniczny nazywamy ruchem harmonicznym prostym.



Pojęcia opisujące ruch drgający.

1. Położenie równowagi - położenie, w którym siły działające na ciało się równoważą (po zatrzymaniu ciała).
2. Amplituda drgań - maksymalne wychylenie z położenia równowagi.
3. Okres drgań (T) - czas jednego pełnego drgania.
4. Częstotliwość drgań (f) - ilość drgań w ciągu sekundy lub odwrotność okresu.

$$f = \frac{1}{T} \text{ lub } f = \frac{n}{t}$$

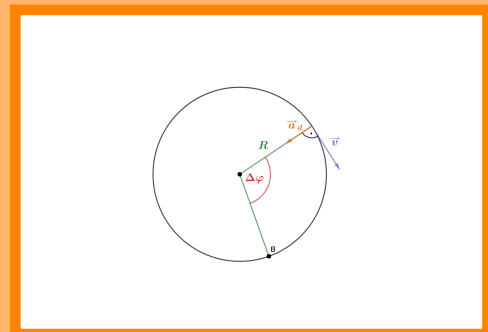
5. Częstość kołowa lub kątowna. $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$

Ruch jednostajny po okręgu.

$$a_d = \frac{v^2}{R} \text{ i } v = \omega \cdot R \Rightarrow a_d = \omega^2 \cdot R$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}, t_0 = 0 \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0$$

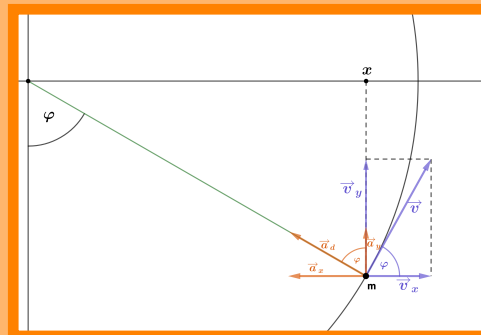
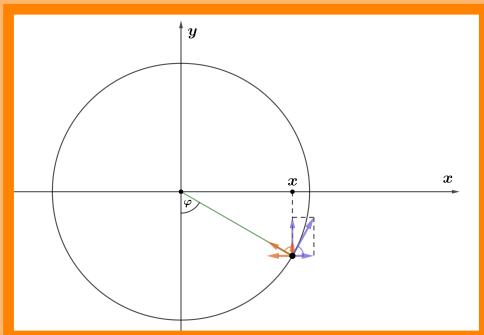
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ i } \omega = 2\pi f$$



2. Drgania harmoniczne.

Ruch jednostajny po okręgu wzdłuż osi OX .

Spojrzenie z góry:



$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot A, \quad a_a = \omega^2 \cdot R = \omega^2 \cdot A, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0$$

1. Współrzędna x-owa położenia (położenie lub wychylenie) (x):

$$\sin(\varphi) = \frac{x}{R} \Rightarrow x = \sin(\varphi) \cdot R \Rightarrow x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \text{ (gdzie: } A = x_{max}\text{)}.$$

2. Współrzędna x-owa prędkości (v_x):

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{v}_x|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{v}_x| = \cos(\varphi) \cdot |\vec{v}| \Rightarrow v_x = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

(gdzie: $\omega \cdot A = v_{max}$).

3. Współrzędna x-owa przyspieszenia (a_x):

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{a}_x|}{|\vec{a}_d|} \Rightarrow |\vec{a}_x| = |\vec{a}_d| \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow a_x = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

(gdzie: $A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = x$) $\Rightarrow a_x = -\omega^2 \cdot x$.

4. Współrzędna x-owa siły wypadkowej:

$$\vec{F}_w = \vec{a} \cdot m \Rightarrow F_x = a_x \cdot m \Rightarrow F_x = -m \cdot \omega^2 \cdot x.$$

5. Oznaczenia:

- A - amplituda [m],
- t - czas [s],
- ω - częstość kołowa/kątowa [$\frac{rad}{s}$],
- φ_0 - faza początkowa (przesunięcie fazowe) - określa początkowe położenie,
- $(\omega t + \varphi_0)$ - faza ruchu harmonicznego [rad],

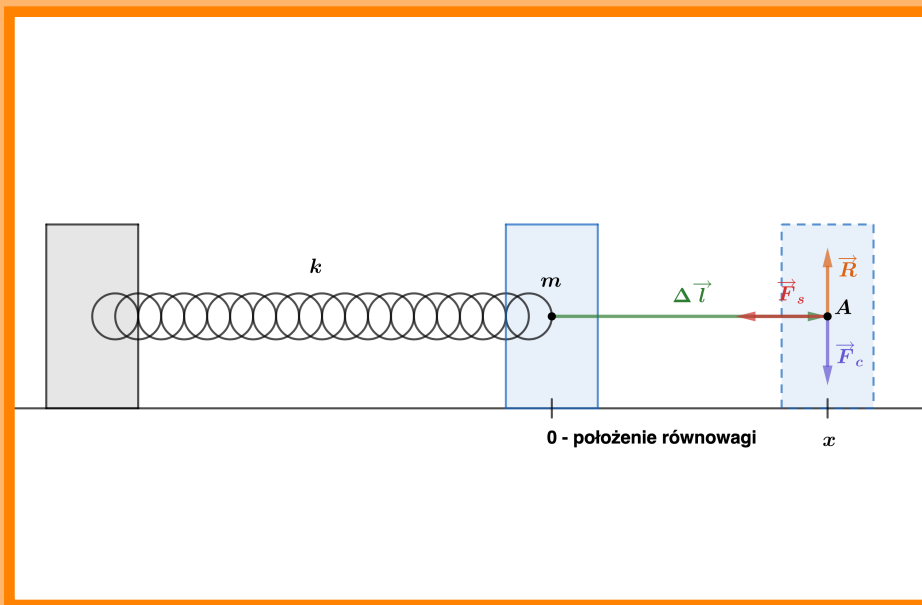
Uwaga!

Jeżeli faza początkowa i czas są równe zero to $x = 0$.

3. Drgania sprężyn.

Oscylator harmoniczny - ciało, które porusza się ruchem harmonicznym, np. odważnik na sprężynie, wahadło matematyczne.

Drgania sprężyny - poziom.



$$\vec{F}_w = \vec{F}_s + \vec{F}_c + \vec{R} \quad (\vec{F}_c + \vec{R} = 0) \quad \vec{F}_w = \vec{F}_s, \quad \vec{F}_s = -k \cdot \Delta \vec{l} \Rightarrow \vec{F}_w = -k \cdot \Delta \vec{l}$$

$$\vec{F}_w = [F_{wx}; F_{wy}] = [F_x; F_y] = [-m \cdot \omega^2 x; F_y]$$

$$\Delta \vec{l} = [\Delta l_x; \Delta l_y] = [x - 0; 0] = [x; 0]$$

$$\vec{F}_w = -k \cdot \Delta \vec{l} \quad -m\omega^2 x = -k \cdot x \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (\omega = \frac{2\pi}{T} / \omega = 2\pi f)$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Okres drgań nie zależy od amplitudy drgań.

Drgania sprężyny - pion.

1. Krok 1.

$$\vec{F}_w = \vec{F}_s + \vec{F}_c = 0$$

$$-k \cdot \Delta \vec{l} + m \vec{g} = 0 \Rightarrow -k \cdot \Delta \vec{l} = -m \vec{g}$$

$$\Delta \vec{l} = [\Delta l_x; \Delta l_y] = [0 - x_0; 0] = [-x_0; 0]$$

$$\vec{g} = [g_x; g_y] = [g; 0]$$

$$-k \cdot (-x_0) = -m \cdot g \Rightarrow mg = -kx_0$$

2. Krok 2.

$$\vec{F}_w = \vec{F}_s + \vec{F}_c \quad \vec{F}_w = -k \cdot \Delta \vec{l} + m \vec{g}$$

$$\vec{F}_w = [-m\omega^2 x; F_y]$$

$$\Delta \vec{l} = [\Delta l_x; \Delta l_y] = [x - x_0; 0]$$

$$\vec{g} = [g_x; g_y] = [g; 0]$$

$$-m\omega^2 x = -k \cdot (x - x_0) + mg$$

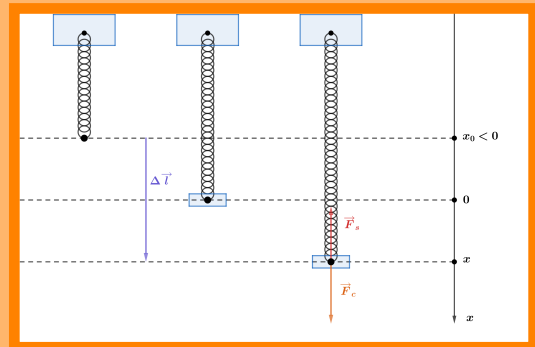
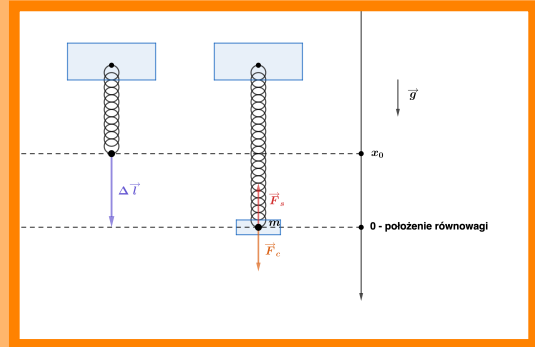
(z kroku 1. wiemy, że: $mg = -kx_0$)

$$-m\omega^2 x = -k \cdot (x - x_0) - k \cdot x_0$$

$$-m\omega^2 x = -k \cdot x$$

tak samo jak w drganiach sprężyny poziomej więc:

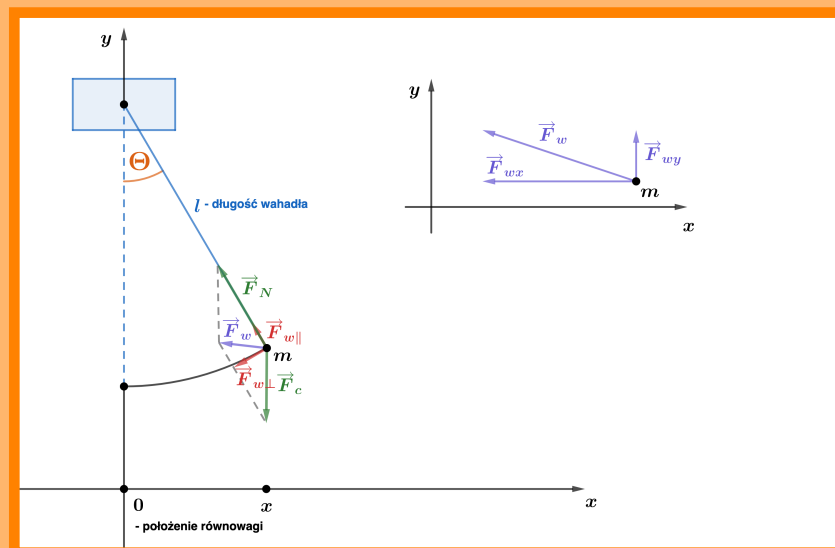
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



4. Wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne (model fizyczny) - punkt materialny o masie m zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici.

Rysunek wahadła matematycznego.



$$\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_N \quad \vec{F}_w = \vec{F}_{w\parallel} + \vec{F}_{w\perp} \quad \sin \Theta = \frac{|\vec{F}_{w\perp}|}{|\vec{F}_c|} \Rightarrow |\vec{F}_{w\perp}| = mg \cdot \sin \Theta$$

Zakładamy, że kąt Θ - mały więc:

$$\begin{cases} \sin \Theta \approx \Theta \\ |\vec{F}_{w\perp}| \approx |\vec{F}_{wx}| \end{cases} \Rightarrow |\vec{F}_{wx}| \approx mg \cdot \Theta \quad \begin{array}{l} \text{Łuk: } \Theta \cdot l \text{ (Obw} = 2\pi l) \\ x \approx \Theta \cdot l \Rightarrow \Theta = \frac{x}{l} \end{array}$$

$$F_{wx} = -mg \cdot \frac{x}{l}$$

Okres drgań wahadła matematycznego.

z jednej strony: $F_{wx} = -mg \cdot \frac{x}{l}$, a z drugiej: $F_{wx} = -m\omega^2 x$

$$-m \cdot \omega^2 x = \frac{-mg}{l} \cdot x \wedge \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okres drgań nie zależy od amplitudy drgań (A) i masy (m) wahadła matematycznego.

5. Energia w ruchu harmonicznym.

Wzory używane w zagadnieniu:

$$1. \quad x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$3. \quad v_x = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$2. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \omega^2 = \frac{k}{m}, k = \omega^2 \cdot m$$

$$4. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Przemiany energii - odważnik na sprężynie - drgania poziome.

$$1. \quad E_{pc} = mgh = 0,$$

ponieważ: $h = 0$

$$2. \quad E_{ps} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta l)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x - 0)^2 = \frac{1}{2} \cdot kx^2$$

podstawiamy:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_{ps} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$3. \quad E_k = \frac{1}{2} m v_x^2$$

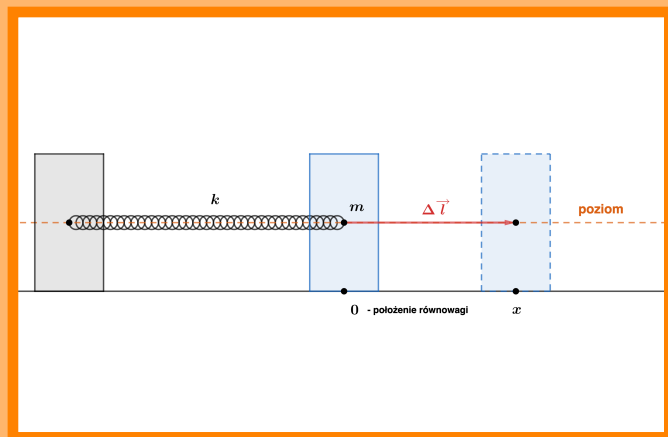
podstawiamy: $v_x = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad \text{podstawiamy: } k = \omega^2 \cdot m$$

$$E_k = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$4. \quad E = E_{pc} + E_{ps} + E_k = \frac{1}{2} k A^2 \left[\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right]$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \text{const} - \text{zasada zachowania całkowitej energii mechanicznej dla odważnika na sprężynie (drgania poziome)}$$



Przemiany energii - odważnik na sprężynie - drgania pionowe.

$$-mg = kx_0$$

$$1. E_{pc} = mgh = -mg \left(x - \frac{1}{2}x_0 \right)$$

$$E_{pc} = kx_0 \left(x - \frac{1}{2}x_0 \right)$$

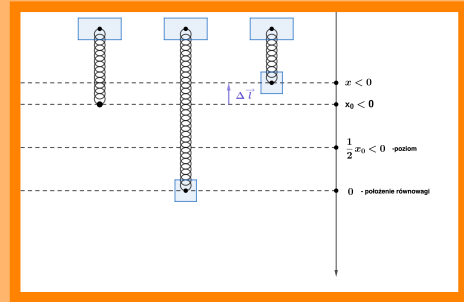
$$2. E_{ps} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$$3. E_p = E_{pc} + E_{ps} = kx_0 \left(x - \frac{1}{2}x_0 \right) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{podstawiamy: } x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad E_p = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$4. E_k = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$5. E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const} - \text{zasada zachowania całkowitej energii mechanicznej dla odważnika na sprężynie (drgania pionowe)}$$



Przemiany energii - wahadło matematyczne.

$$(l - h)^2 + x^2 = l^2 \Rightarrow 2hl = x^2 \left[1 + \left(\frac{h}{x} \right)^2 \right]$$

Uwaga! Jeżeli Θ - mały kąt to:

$$x \gg h \Rightarrow \frac{h}{x} \approx 0 \Rightarrow h = \frac{x^2}{2l}$$

$$1. E_{ps} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta l)^2 = 0$$

$$2. E_{pc} = mgh = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg}{l} \cdot x^2 \text{ podstawiamy:}$$

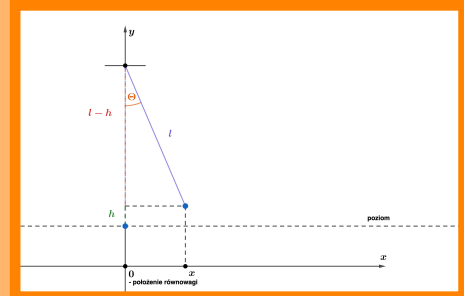
$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) E_{pc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg}{l} \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$3. E_k = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0) \text{ podstawiamy: } \omega^2 = \frac{g}{c}$$

$$E_k = \frac{1}{2}m \cdot \frac{g}{l} \cdot A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$4. E = E_{pc} + E_{ps} + E_k = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} \cdot A^2 \left[\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right] \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} A^2 = \text{const} - \text{zasada zachowania całkowitej energii mechanicznej wahadła matematycznego}$$

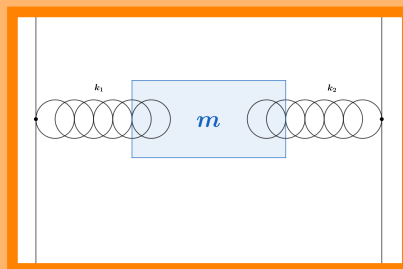
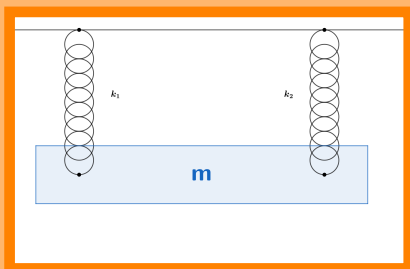


Całkowita energia mechaniczna ciała poruszającego się ruchem harmonicznym prostym jest stała.

Dane są dwie sprężyny o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 .

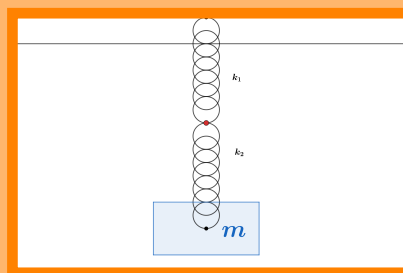
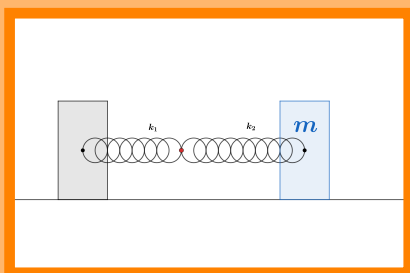
1. Obie sprężyny zamocowane są na odważnikach.

$k_c = k_1 + k_2$ k_c - współczynnik sprężystości całego układu.



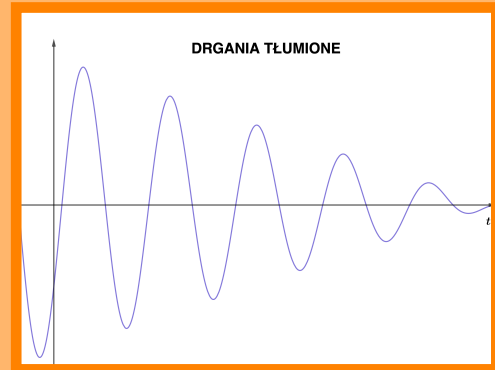
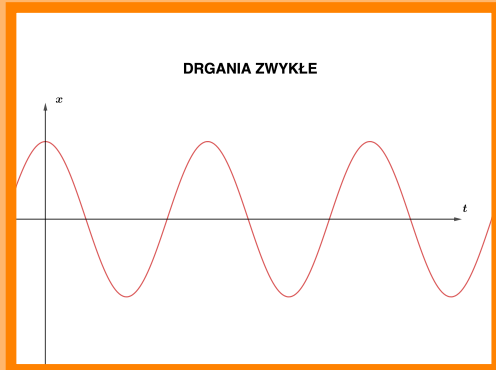
2. Jedna ze sprężyn zamocowana do odważnika, a druga do tej pierwszej sprężyny.

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



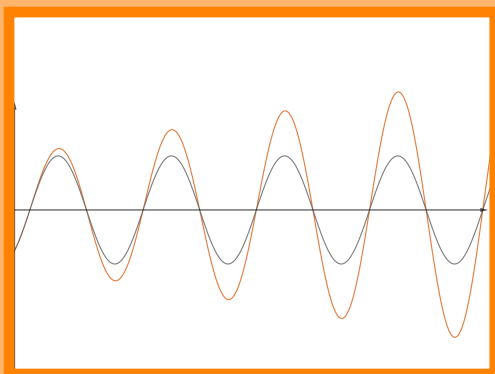
6. Drgania tłumione i wymuszone. Rezonans.

Drgania harmoniczne tłumione - drgania, w których pod wpływem sił oporu amplituda maleje.



Częstotliwość drgań własnych - częstotliwość drgań oscylatora harmonicznego, który został wychylony z położenia równowagi i puszczony.

Drgania harmoniczne wymuszone - drgania, w których pod wpływem periodycznej siły zewnętrznej amplituda drgań rośnie.



Rezonans mechaniczny - przekazywanie drgań z jednego do drugiego oscylatora harmonicznego pod warunkiem, że częstotliwości drgań własnych tych oscylatorów są sobie równe. Takie częstotliwości nazywamy rezonansowymi.

